

הסרת חלודה

לפניכם יחידות תרגול במגוון נושאי האלגברה הבסיסית: שברים, משוואות וחזקות ושורשים. מטרת התרגול לסייע לכם לפתח את המיומנות הנדרשת בשימוש בכלים אלה, על מנת שתוכלו להתמודד עם השאלות הכמותיות שתפגשו בהמשך.

מטרת התרגול אינה לדמות את התרגילים שעתידיים להופיע בבחינה ולכן הם אינם מוצגים בצורה של שאלות רב- ברירה (שאלות אמריקאיות).

מי שמתקשה בקובץ זה, יכול גם לפנות לקובץ המים הרדודים.

לפני כל יחידת תרגול, יופיעו הסברים המיועדים לעזור לכם לחזור על הכלים החשובים וכללי האלגברה. קראו את ההסברים וחזרו על הדוגמאות הפתורות לפני שתתרגלו עצמאית.

אם אתם מוצאים את עצמכם מתקשים בתרגול או בשינון הכללים, מומלץ להכין לעצמכם כרטיסיות עבודה, בהן תרשמו את הכללים והתכונות ובהן תוכלו להיעזר תוך כדי תרגול.

שברים

שבר הוא למעשה **צורת הצגה** לחלוקה של שני מספרים.

במקום לומר במילים a לחלק ל- b פשוט רושמים בצורה $\frac{a}{b}$ כאשר a נקרא המונה של השבר

ו- b נקרא המכנה של השבר.

כמעט כל מספר ניתן להציג כשבר (כל מספר רציונלי). כאשר מדברים על שברים אנו חושבים באופן טבעי

על מספרים כגון $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$ או במילים אחרות על שברים שהם הצגה של מספרים בין אפס לאחד, אך

כפי שכבר הזכרנו כמעט כל מספר ניתן להציג כשבר: למשל את המספר 8 ניתן להציג כשבר בצורה: $\frac{8}{1}$,

את המספר 2.75 ניתן להציג כשבר בצורה $2\frac{3}{4}$ (שבר מעורב) או $\frac{11}{4}$ (שבר טהור), ובאופן דומה להציג

כשבר מספרים נוספים שהם לא דווקא בין אפס לאחד.

שבר מעורב ושבר טהור

שבר מעורב מתאר מספר שמורכב ממספר שלם ושבר יחיד, לדוגמא $3\frac{2}{3}$. שבר טהור מתאר מספר שהוא

שבר בלבד. כדי להפוך שבר מעורב לשבר רגיל עלינו לכפול את השלם במכנה ולהוסיף לו את המונה. את

התוצאה נחלק במכנה המקורי. לדוגמא: $5\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{16}{3}$. כדי להפוך שבר רגיל לשבר מעורב - נבדוק כמה פעמים המכנה נכנס

במונה (התוצאה תייצג את השלם). את השארית נחלק במכנה (חלק זה מייצג את השבר).

לדוגמא: $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$. המכנה נכנס 4 פעמים במונה והשארית היא 2 ואותה אנו מחלקים במכנה.

צמצום והרחבת שברים

עד כה ראינו כי כמעט כל מספר ניתן להציג כשבר. כעת נראה כי לכל מספר יש יותר מהצגה אחת אפשרית כשבר או במילים אחרות: ייתכן ששני שברים שונים הם למעשה הצגה של אותו מספר.

חוק הצמצום וההרחבה: אם נקח שבר כלשהו, ונכפול את המונה והמכנה שלו באותו מספר, נקבל שבר חדש שהוא הצגה אחרת של אותו מספר.

לדוגמא: ניקח את השבר $\frac{1}{2}$. אם נכפול את המונה ואת המכנה פי 2 נקבל את השבר $\frac{2}{4}$ שאף הוא מהווה

הצגה כשבר פשוט למספר חצי (0.5). פעולה זו היא הרחבה פי 2 של השבר. ניתן גם להרחיב את השבר פי 3

ואז השבר יהיה $\frac{3}{6}$.

באותו אופן אם ניקח את השבר $\frac{4}{8}$ ונחלק מונה ומכנה ב- 4, נקבל את השבר $\frac{1}{2}$. פעולה זו היא צמצום פי

4 של השבר.

ביצוע פעולות חיבור וחסור על שברים

על מנת לחבר או לחסר שני שברים עלינו להביא את שני השברים למצב שבו המכנים שלהם זהים.

לדוגמא: $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ ובאופן דומה: $\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

עד כאן הכל פשוט: כאשר המכנים זהים כל מה שעלינו לעשות הוא לחבר/לחסר את המונים בעוד המכנה נשאר ללא שינוי.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = ? \text{ למשל בתרגיל}$$

אם המכנים אינם זהים עלינו לבצע פעולת הרחבה/צמצום שברים על אחד מהשברים, או על שניהם, על מנת להגיע למצב שבו המכנים זהים (הגעה ל"מכנה משותף"). למשל בדוגמא האחרונה אם נרחיב את

$$\frac{2}{3} \text{ פי } 4 \text{ נקבל } \frac{8}{12} \text{ ואם נרחיב את השבר } \frac{1}{4} \text{ פי } 3 \text{ נקבל את השבר } \frac{3}{12}. \text{ כלומר כעת עלינו לחשב:}$$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}. \text{ כפי שכבר רמזנו, לעיתים די בהרחבה של אחד השברים על מנת להגיע למכנה משותף,}$$

אולם במקרים אחרים (כמו בדוגמא האחרונה) אין מנוס מלבצע הרחבה לשני השברים.

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = ? \text{ דוגמא נוספת:}$$

$$\text{שלב 1 – נרחיב את השבר } \frac{4}{5} \text{ פי } 3 \text{ ונקבל את השבר } \frac{12}{15}.$$

$$\text{שלב 2 – נרחיב את השבר } \frac{2}{3} \text{ פי } 5 \text{ ונקבל את השבר } \frac{10}{15}.$$

$$\text{שלב 3 – נבצע את החישוב הדרוש (חיסור): } \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$$

עד כה ראינו כיצד להתמודד עם תרגילי חיבור וחיסור שברים שבהם יש שני מחוברים. אך כיצד נפעל

$$\text{במקרה שיש יותר משני מחוברים? למשל בתרגיל: } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ? \text{ ניתן כמובן לנקוט בשיטת השלבים,}$$

כלומר לחבר קודם כל שניים מהשברים ואז לחבר את השלישי לתוצאה שהתקבלה, אולם זוהי דרך

מסורבלת שעלולה לגזול מאיתנו זמן רב בעיקר במקרים בהם מספר המחוברים גדול.

הדרך הקלה והמהירה היא למצוא מכנה משותף בין כל המחוברים ולעבוד בשלב אחד.

כך למשל בדוגמא האחרונה נוכל לעבוד עם מכנה משותף 12 ולרשום:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$$

גם המספר 24 יכול לשמש עבורנו כמכנה משותף, אבל נוח יותר לעבוד עם מספר נמוך יותר.

EZ-TIP: תמיד נחפש את המכנה המשותף הנמוך ביותר והקל ביותר למציאה.

ביצוע פעולות כפל על שברים

ביצוע פעולת כפל בין שברים הינה משימה פשוטה למדי. באופן בסיסי, כל שעלינו לעשות הוא לכפול את המונים של השברים זה בזה ואת המכנים של השברים זה בזה ואז פשוט לרשום את מכפלת המונים חלקי מכפלת המכנים.

$$\text{למשל על מנת לחשב: } \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = ? \text{ נכפול מונה במונה ונקבל 8, נכפול מכנה במכנה ונקבל 15, ולכן הפתרון}$$

$$\text{יהיה: } \frac{8}{15}. \text{ באופן כללי ניתן לומר: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

זהו הרעיון הכללי בתרגילי כפל שברים והוא עובד **תמיד**.

על מנת **לחסוך מעט בזמן** הנדרש לביצוע החישובים, נעדיף בד"כ לבצע צמצום של הגורמים במונה ובמכנה לפני ביצוע ההכפלה וע"י כך יהיו החישובים שנדרש לבצע פשוטים יותר (מספרים קטנים יותר).

$$\text{לדוגמא: על מנת לחשב } \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} = ? \text{ בשלב ראשון נרשום את התרגיל כך: } \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 4} \text{ אך במקום לחשב}$$

קודם את המונה, אח"כ את המכנה, ובסוף לבצע חילוק, פשוט נבצע צמצום בין האברים במונה ובמכנה:

את ה- 2 שבמונה נצמצם עם ה- 4 שבמכנה (נשאר עם 2 במכנה) ואת ה- 6 שבמונה נצמצם עם ה- 3 שבמכנה

$$\cdot \frac{\cancel{2} \cdot 6}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{2}{2} = 1: \text{ כלומר } \cdot \frac{2}{2} = 1$$

$$\cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{7}{15} = ? \quad \cdot \frac{5 \cdot 7}{14 \cdot 15} = ? \quad \text{בשלב ראשון נרשום את התרגיל כך:}$$

$$\cdot \frac{5 \cdot 7}{14 \cdot 15} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \quad \text{בשלב שני נצמצם איברי מונה ומכנה זה בזה ונקבל:}$$

ביצוע פעולת כפל בין שלושה שברים (או יותר) נעשית באופן דומה: שוב רושמים את כל הביטוי עם קו שבר אחד ואז נצמצמים איברים מהמונה מול איברים מהמכנה.

$$\cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = ? \quad \text{בשלב ראשון נרשום:}$$

$$\cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{8 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{8} \quad \text{בשלב שני נצמצם ונקבל:}$$

ביצוע פעולות חילוק על שברים

כל שעלינו לעשות על מנת לחלק שבר אחד בשבר שני הוא **לכפול** את השבר הראשון בשבר **ההופכי** של

השבר השני. כך למשל, על מנת לחשב: $\frac{2}{3} : \frac{4}{3} = ?$, בשלב ראשון נרשום את תרגיל החילוק כתרגיל כפל

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = ? \quad \text{בהופכי:}$$

$$\cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} \quad \text{ובשלב שני נחשב לפי הכללים שלמדנו לגבי כפל שברים:}$$

$$\cdot \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad \text{באופן כללי ניתן להגדיר את פעולת החילוק בשברים כך:}$$

לעיתים אנו נדרשים לבצע חילוק של מספר שלם בשבר. תלמידים רבים נוטים להתבלבל בחישובים אלו.

הדרך הפשוטה ביותר היא לרשום את המספר השלם ב"הצגת השבר" שלו (למשל במקום 8 לרשום $\frac{8}{1}$)

ומשם להמשיך כרגיל. לדוגמא: $\frac{2}{3} : 6 = ?$. בשלב ראשון נרשום את השלם 6 בהצגת השבר שלו:

$$\cdot \frac{6}{1} : \frac{2}{3} = ?$$

$$\cdot \frac{6}{1} : \frac{2}{3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 9 \quad \text{בשלב שני נרשום את תרגיל החילוק כתרגיל כפל בהופכי ונפתור:}$$

ביצוע פעולת העלאה בחזקה על שבר

על מנת להעלות שבר בחזקה כלשהי יש להעלות בנפרד את המונה ואת המכנה באותה חזקה.

$$\cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \quad \text{כך למשל: בחזקת 2 יהיה שווה ל:}$$

ביצוע פעולת שורש על שבר

באותו אופן בדיוק, על מנת להוציא שורש של שבר כלשהו, עלינו להוציא בנפרד שורש מהמונה ומהמכנה.

$$\cdot \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{כך למשל: שכן } \sqrt{4} = 2 \text{ וכן } \sqrt{9} = 3$$

שברים עשרוניים

פרט להצגה בצורת מונה ומכנה ניתן להציג שברים גם בצורת שבר עשרוני. בפועל, שבר עשרוני הוא שבר פשוט שהמכנה שלו הוא 10 או 100 או 1000 וכו' (כלומר חזקות של 10). תרגום שבר עשרוני לשבר פשוט הינה פעולה פשוטה למדי: לפי מספר הספרות אחרי הנקודה העשרונית נקבע מה יהיה המכנה של השבר הפשוט אותו נקבל. למשל אם יש ספרה אחת אחרי

הנקודה (כמו למשל בשבר העשרוני 0.8) אזי המכנה של השבר הפשוט יהיה 10 והתרגום יהיה ל: $\frac{8}{10}$.

באותו אופן, השבר העשרוני 0.54 יתורגם לשבר הפשוט $\frac{54}{100}$ ואילו 0.342 יתורגם ל: $\frac{342}{1000}$.

ביצוע פעולות חשבוניות על שברים עשרוניים

כאשר אנו נדרשים לבצע פעולות חשבוניות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק, חזקה, שורש) על שברים עשרוניים ניתן כמובן לתרגם אותם לשברים פשוטים ואז לעבוד לפי הכללים שזה עתה הכרנו. מנגד, לעיתים נוח יותר לעבוד ישירות על השבר העשרוני. כך למשל בתרגילי חיבור וחסור של שברים עשרוניים. אם נקפיד על כתיבה מדויקת (כלומר נקפיד שהנקודה העשרונית במחובר השני תהיה בדיוק מתחת לנקודה העשרונית במחובר הראשון) הרי שאז פעולת החיבור/חיסור יהיו קלות ממש כמו חיבור/חיסור מספרים שלמים. זוהי הצורה הנוחה והמומלצת לחיבור שברים עשרוניים, בעבור כל מי שקצת "חלוד":

$$+ 0.137$$

$$\underline{0.982}$$

$$1.119$$

תרגול שברים

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = ?$

2. $\frac{3}{4} - \frac{2}{6} = ?$

3. $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = ?$

4. $\frac{4}{7} - \frac{2}{5} = ?$

5. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = ?$

6. $\frac{20}{24} - \frac{2}{3} - \frac{4}{12} = ?$

7. $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = ?$

8. $2\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = ?$

9. $3\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} - \frac{8}{2} = ?$

10. $3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2} = ?$

11. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = ?$

12. $\frac{2}{7} \cdot \frac{21}{16} = ?$

13. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{5} = ?$

14. $\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{4}{9} = ?$

15. $2\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = ?$

16. $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = ?$

17. $\frac{5}{7} : \frac{15}{14} = ?$

18. $4 : \frac{3}{5} = ?$

19. $\frac{4}{5} : 3 = ?$

20. $\frac{4}{5} : \frac{8}{3} : \frac{2}{6} = ?$

21. $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = ?$

22. $\frac{5}{2} : \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = ?$

23. $1\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} : 2\frac{1}{3} = ?$

24. $2\frac{2}{5} : \frac{4}{6} \cdot 1\frac{1}{2} = ?$

25. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = ?$

26. $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = ?$

27. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} : \frac{2}{5} = ?$

28. $0.33 + 0.44 = ?$

29. $0.8 \cdot 0.4 = ?$

30. $0.8 : 0.4 = ?$

פתרונות - שברים

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ בתרגיל זה נתון לנו כבר מכנה משותף ולכן ניתן מייד לחבר את מונו

השברים. נשים לב כי ניתן היה לצמצם את התוצאה שקיבלנו באופן הבא: $\frac{4}{2} = 2$.

EZ-TIP: תמיד נשאף להגיע לביטוי המצומצם ביותר האפשרי.

2. $\frac{3}{4} - \frac{2}{6} \Rightarrow \frac{\cdot 3/3}{4} - \frac{\cdot 1/1}{3} = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$ בתרגיל זה עלינו ליצור מכנה משותף לפני שנוכל לחסר את

השברים. שימו לב, כי השבר $\frac{2}{6}$ הינו שבר הניתן לצמצום לפני פעולת החיסור: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3. $\frac{\cdot 3/2}{5} + \frac{\cdot 5/2}{3} = \frac{6+10}{15} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$ בתרגיל זה תוצאת תרגיל החיבור הינה שבר אשר המונה בו

גדול מן המכנה. במצב זה, יש לעבור לשבור מעורב וזו תהיה התשובה הסופית.

4. $\frac{\cdot 5/4}{7} - \frac{\cdot 7/2}{5} = \frac{20-14}{35} = \frac{6}{35}$ לעיתים המכנה המשותף הפשוט ביותר הוא מכפלת המכנים זה בזה.

5. $\frac{\cdot 35/1}{3} + \frac{\cdot 21/1}{5} + \frac{\cdot 15/2}{7} = \frac{35+21+30}{105} = \frac{86}{105}$ המכנה המשותף כאן הוא תוצאת המכפלה של שלושת

המספרים זה בזה. שימו לב כי עלינו להרחיב כל מונה בהתאם למספר בו הורחב המכנה.

6. $\frac{\cdot 1/20}{24} - \frac{\cdot 8/2}{3} - \frac{\cdot 2/4}{12} = \frac{20-16-8}{24} = \frac{-4}{24} = \frac{-1}{6}$ במקרה זה לא כדאי לכפול את שלושת המכנים זה

בזה, ניתן לראות כי המכנה הגדול ביותר - 24 מתחלק בכל המכנים ולכן הוא יכול להוות את המכנה המשותף - נרחיב את שאר השברים בהתאם.

7. $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{24+20-15}{30} = \frac{29}{30}$ במקרה זה, המכנה המשותף הוא תוצאת המכפלה של שלושת המספרים.

8. $2\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{10+3}{4} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ שימו לב, כאשר נתון לנו שבר מעורב ראשית נהפכו לשבר

טהור ורק אז נבצע את פעולת החיבור כרגיל: $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

EZ-TIP: תמיד נמיר שבר מעורב לשבר טהור לפני פעולות חיבור / חיסור שברים.

9. $3\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} - \frac{8}{2} = \frac{11}{3} + \frac{5}{2} - \frac{8}{2} = \frac{22+15-24}{6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$ גם בתרגיל זה עלינו ראשית להמיר

שברים מעורבים לשבר טהור ורק אח"כ לפתור.

10. $3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2} = \frac{16}{5} - \frac{5}{2} = \frac{32-25}{10} = \frac{7}{10}$

$$11. \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15} \quad \text{כפל שברים : נכפול מונה במונה ומכנה במכנה.}$$

$$12. \quad \frac{2}{7} \cdot \frac{21}{16} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{21}}{\cancel{7} \cdot 16} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 8} = \frac{3}{8} \quad \text{מומלץ לצמצם לפני שמסיימים את ההכפלה. נצמצם 2 ו-16, ובנוסף 7 ו-21.}$$

EZ-TIP : בכפל שברים מותר לנו לצמצם כל גורם במונה עם כל גורם במכנה.

$$13. \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{4} \cdot \cancel{9} \cdot 5} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{30}$$

$$14. \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 9} = \frac{4}{9} \quad \text{שימו לב, כי בתרגיל זה נמשיך ונצמצם ככל שנוכל ורק לאחר מכן נכפול. במצב זה המספרים במכפלה הרבה יותר קטנים ונוחים.}$$

$$15. \quad 2 \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8} = 1 \frac{7}{8} \quad \text{גם בכפל שברים אנו חייבים להפוך את השבר המעורב לטהור לפני שנוכל להמשיך בתרגיל : } 2 \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

EZ-TIP : תמיד נמיר שבר מעורב לשבר טהור לפני פעולות כפל / חילוק שברים.

$$16. \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{9}}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} \quad \text{חילוק שברים : נכפול בהופכי. כלומר, נהפוך את השבר השני : } \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{9}{4} \text{ ואז נפתור כתרגיל כפל רגיל.}$$

$$17. \quad \frac{5}{7} : \frac{15}{14} = \frac{5}{7} \cdot \frac{14}{15} = \frac{5 \cdot 14}{7 \cdot 15} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3} \quad \text{נזכור לצמצם אך ורק לאחר שהפכנו לתרגיל כפל.}$$

EZ-TIP : לעולם לא נצמצם בתרגיל החילוק! ראשית נהפוך לתרגיל כפל ואז נצמצם.

$$18. \quad 4 : \frac{3}{5} = \frac{4}{1} : \frac{3}{5} = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3} = 6 \frac{2}{3} \quad \text{חלוקת שלם בשבר : ראשית נרשום את השלם כשבר שמכנה אחד. ולאחר מכן נבצע כפל בהופכי באופן רגיל.}$$

$$19. \quad \frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5} : \frac{3}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15} \quad \text{גם בחלוקת שבר בשלם, ראשית נכתוב את השלם כשבר שמכנהו אחד ורק אז נכפול בהופכי.}$$

$$20. \quad \frac{4}{5} : \frac{8}{3} : \frac{2}{6} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 6}{5 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9}{10} \quad \text{כאשר בתרגילי כפל / חילוק ישנם יותר משני שברים, ניתן לחשב כל זוג בנפרד או לחשב ברצף את כל הפעולות בתרגיל אחד. חישבו בתרגיל אחד הינו בדרך כלל הדרך הפשוטה והמהירה ביותר.}$$

21. גם כאשר מדובר בתרגיל מעורב בו גם תרגילי

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{7 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{7 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{10}{21}$$
 כפל וגם חילוק, עדיין ניתן לפתור ברצף בזה אחר זה. את תרגיל החילוק נהפוך לכפל בהופכי.

EZ-TIP: כאשר בתרגילי כפל/חילוק ישנם יותר משני שברים – ניתן לפתור את התרגילים ברצף אבל חובה לפתור לפי הסדר בו מופיעים השברים.

22. את תרגיל החילוק נהפוך לכפל בהופכי ולאחר מכן נפתור כתרגיל כפל פשוט.

$$\frac{5}{2} : \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{8} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 6}{2 \cdot 1 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 4} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

23. ראשית עלינו להפוך את השבר המעורב לשבר רגיל, ולאחר מכן נפתור על פי השלבים המוכרים.

$$1 \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} : 2 \frac{1}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} : \frac{7}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 1} = \frac{15}{32}$$

24.

$$2 \frac{2}{5} : \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{12}{5} : \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{5} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{27}{5} = 5 \frac{2}{5}$$

25. חשוב לזכור שפעולות כפל/חילוק קודמות לחיבור/חיסור.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

EZ-TIP: נשים לב לסדר פעולות חשבון – כפל וחילוק תמיד קודם לחיבור וחיסור.

26. גם בתרגיל זה, ראשית נפתור את תרגיל הכפל ורק אז נבצע את פעולת החיבור.

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

27. ראשית נבצע את פעולת החילוק, על ידי כפל בהופכי ורק אז את פעולת החיבור.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = \frac{3}{4} + 1 = 1 \frac{3}{4}$$

28. $0.33 + 0.44 = 0.77$ בחיבור/חיסור שברים עשרוניים, ניתן לחשב על ידי כתיבה אנכית מסודרת:

$$\begin{array}{r} 0.33 \\ + 0.44 \\ \hline 0.77 \end{array}$$

29. $0.8 \cdot 0.4 = \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{32}{100} = 0.32$ בכפל של שברים עשרוניים ניתן להפוך ראשית את השבר

העשרוני לשבר פשוט, לדוגמה: $0.8 = \frac{8}{10}$ ולאחר מכן לפתור כרגיל כמכפלת שברים פשוטים.

30. $0.8 : 0.4 = \frac{8}{10} : \frac{4}{10} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{4} = \frac{8 \cdot 10}{10 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 2$ חלוקת שבר עשרוני בשבר עשרוני, גם כאן ניתן להעביר ראשית לשברים פשוטים ולאחר מכן לבצע כפל בהופכי כרגיל.

חזקות ושורשים

חזקה היא למעשה **צורת כתיבה מקוצרת לכפל** שבו כל האיברים זהים זה לזה.

במקום לרשום : $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ נרשום : 2^5 .

צורת הרישום של חזקה באופן כללי היא a^b כאשר a נקרא בסיס החזקה (זהו המספר אותו נכפול בעצמו)

ו- b נקרא המעריך של החזקה (קובע כמה פעמים נכפול את אותו מספר בעצמו).

על מנת להצליח לפתור תרגילי חזקות ביעילות אנו נדרשים להכיר בעל פה את **כללי החזקות**.

כמו כן, על מנת לחסוך זמן יקר בבחינה, רצוי להכיר בע"פ מספר חישובים בסיסיים.

כללי החזקות

1. **כפל חזקות בעלות בסיסים זהים** : כאשר אנו כופלים זו בזו שתי חזקות בעלות בסיסים זהים התוצאה (המכפלה) תהיה הבסיס בחזקת סכום המעריכים.

$$\text{כלומר: } a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

$$\text{דוגמה: } 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

2. **חילוק חזקות בעלות בסיסים זהים** : כאשר אנו מחלקים זו בזו שתי חזקות בעלות בסיסים זהים התוצאה (המנה) תהיה הבסיס בחזקת ההפרש בין המעריך של המונה למעריך של המכנה.

$$\text{כלומר: } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\text{דוגמה: } \frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9$$

3. **חזקה של חזקה** : כאשר אנו מעלים חזקה מסוימת בחזקה נוספת אזי התוצאה תהיה - הבסיס בחזקת מכפלת המעריכים זה בזה.

$$\text{כלומר: } (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\text{דוגמה: } (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$$

4. **כפל של חזקות בעלות מעריכים זהים** : כאשר אנו כופלים זו בזו חזקות אשר להן **מעריכים זהים** ובסיסים שונים, ניתן לכפול קודם כל את הבסיסים ורק אח"כ להעלות את המכפלה בחזקת המעריך.

$$\text{כלומר: } a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\text{דוגמה: } 3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$$

5. **חילוק של חזקות בעלות מעריכים זהים** : כאשר אנו מחלקים זו בזו חזקות בעלות מעריכים זהים ובסיסים שונים, ניתן לחלק קודם את הבסיסים ורק אז להעלות בחזקת המעריך.

$$\text{כלומר: } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\text{דוגמה: } \frac{6^3}{3^3} = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 2^3 = 8$$

6. **חזקה שבה המעריך הוא מס' שלילי** : כאשר אנו מחשבים חזקה שבה המעריך הינו מספר שלילי, "נהפוך" את בסיס החזקה, ונעלה אותו במעריך החזקה ללא סימן המינוס.

$$\text{כלומר: } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} : \text{דוגמה}$$

$$4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} : \text{דוגמה}$$

מקרים בהם בסיס החזקה הינו מספר שלם והמעריך הוא מס' שלילי : נפעל לפי אותו הכלל בדיוק, רק נשים לב שההופכי של מס' שלם הוא אחד חלקי אותו המספר.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n : \text{כלומר}$$

$$(4)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16} : \text{דוגמה}$$

$$\frac{1}{2^{-2}} = \frac{2^2}{1} = \frac{4}{1} = 4 : \text{דוגמה נוספת}$$

EZ-TIP : כדאי לזכור בעל פה

1. כל מספר בחזקת אחד שווה לעצמו :

$$a^1 = a : \text{כלומר}$$

$$34^1 = 34 : \text{דוגמה}$$

2. כל מספר בחזקת אפס שווה לאחד :

$$a^0 = 1 : \text{כלומר}$$

$$23^0 = 1 : \text{דוגמה}$$

3. מספר חיובי בחזקה כלשהי יישאר תמיד חיובי :

$$\text{כלומר : אם } a > 0 \text{ אז לכל } n \text{ ממשי : } a^n > 0 .$$

$$3^4 = 81 : \text{דוגמה}$$

4. מספר שלילי בחזקה אי-זוגית יישאר תמיד שלילי :

$$\text{כלומר : אם } a < 0 \text{ אז לכל } n \text{ אי-זוגי : } a^n < 0 .$$

$$(-3)^3 = -27 : \text{דוגמה}$$

5. מספר שלילי בחזקה זוגית הופך לחיובי :

$$\text{כלומר : אם } a < 0 \text{ אז לכל } n \text{ זוגי : } a^n > 0 .$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 : \text{דוגמה}$$

6. חישובים שכדאי לזכור בע"פ :

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$			
$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$				
$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$					
$6^1 = 6$	$6^2 = 36$	$6^3 = 216$					
$7^1 = 7$	$7^2 = 49$						
$8^1 = 8$	$8^2 = 64$						
$9^1 = 9$	$9^2 = 81$						
$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$	$16^2 = 256$	$17^2 = 289$

7. ומה עושים כאשר בכל זאת צריך לחשב? משתמשים בכללי החזקות !!!
אין מנוס מלימוד הכללים הללו. במהלך התרגול יש להיעזר בסדרת הכללים אותם הכרנו עד
אשר נראה כי אנו זוכרים ושולטים בכללים אלו.

שורשים

במובנים רבים, הוצאת שורש היא הפעולה ההפוכה להעלאה בחזקה.
צורת הרישום הכללית של פעולת הוצאת שורש n של המספר a היא: $\sqrt[n]{a}$
משמעות הפעולה: אם נתון ש- $\sqrt[n]{a} = b$ אז המשמעות היא כי $b^n = a$
כך למשל: $\sqrt[3]{8} = 2$ שכן כידוע $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
באופן מילולי ניתן לתרגם את הבעיה $\sqrt[n]{a}$ לשאלה: **מצא מספר** שאם תכפול אותו בעצמו n פעמים תקבל a ,
מספר זה הוא בעצם הפתרון של $\sqrt[n]{a}$.
שורש ריבועי: זהו שורש שהמערך שלו הוא 2, נהוג לוותר על המערך ולא לרשום דבר.
כלומר: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.
שורש חיובי ושורש שלילי: לכל מספר חיובי יש שני שורשים, האחד חיובי והשני שלילי.
כלומר: $\sqrt{4} = +2, -2$. בפסיכומטרי, אם a הוא מספר חיובי נתייחס רק **לשורש החיובי** של a .
בדיוק כמו במקרה של חזקות, גם בשורשים קיימת רשימת כללים אשר מסייעת בפתרון שאלות, וגם כאן
ישנם מספר חישובים שכדאי לזכור בע"פ על מנת לחסוך זמן יקר בבחינה.

כללי השורשים

1. **מכפלה של מספרים בעלי אותו שורש** : ניתן לאחד את המספרים במכפלה תחת שורש אחד או להפרידם לשני שורשים נפרדים.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{כלומר:}$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6 \quad \text{דוגמה:}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \quad \text{דוגמה הפוכה:}$$

2. **חילוק (מנה) של מספרים בעלי אותו שורש** : ניתן לאחד את המונה והמכנה תחת אותו השורש או להפרידם לשני שורשים נפרדים.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{כלומר:}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \quad \text{דוגמה:}$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{דוגמה הפוכה:}$$

3. **מעבר משורש לחזקה ולהיפך** : ניתן לעבור בקלות משורש לחזקה ולהיפך – כל שיש לעשות הוא "להפוך" את המעריך.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{או} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{כלומר:}$$

$$\sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 4^2 = 16 \quad \text{לדוגמה:}$$

4. **מעריך שהוא שבר** : כאשר המעריך הוא שבר, המונה קובע באיזה חזקה נעלה והמכנה – איזה שורש נבנה.

כלומר: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, שימו לב שאין חשיבות לסדר הכתיבה – שורש ואז חזקה או חזקה ואז שורש.

דוגמה: $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$, שימו לב כי מטעמי נוחות בחרנו קודם להוציא שורש שלישי ורק לאחר מכן להעלות בחזקה.

5. **כדאי לזכור בעל פה:**

$$\begin{array}{cccccccc} \sqrt{4} = 2 & \sqrt{9} = 3 & \sqrt{16} = 4 & \sqrt{25} = 5 & \sqrt{36} = 6 & \sqrt{49} = 7 & \sqrt{64} = 8 & \sqrt{81} = 9 \\ \sqrt{100} = 10 & \sqrt{121} = 11 & \sqrt{144} = 12 & \sqrt{169} = 13 & \sqrt{196} = 14 & \sqrt{225} = 15 & & \\ \sqrt[3]{8} = 2 & \sqrt[3]{27} = 3 & \sqrt[3]{64} = 4 & \sqrt[3]{125} = 5 & & & & \end{array}$$

EZ-TIP : למספרים שליליים אין שורש זוגי.

תרגול חזקות ושורשים

1. $4^2 = ?$
2. $3^3 = ?$
3. $(-5)^2 = ?$
4. $(-5)^3 = ?$
5. $6^{-2} = ?$
6. $(-3)^{-2} = ?$
7. $12^2 = ?$
8. $0.75^1 = ?$
9. $30^0 = ?$
10. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = ?$
11. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = ?$
12. $2^3 \cdot 2^2 = ?$
13. $3^4 \cdot 3^{-1} = ?$
14. $2^1 \cdot 2^{-1} = ?$
15. $\frac{3^5}{3^3} = ?$
16. $\frac{2^4}{2^{-1}} = ?$
17. $3^2 \cdot 4^2 = ?$
18. $3^3 \cdot (-1)^3 = ?$
19. $\frac{32^2}{4^2} = ?$
20. $\frac{6^{-3}}{2^{-3}} = ?$
21. $\sqrt{64} = ?$
22. $\sqrt[3]{125} = ?$
23. $\sqrt{72} = ?$
24. $2^{\frac{6}{3}} = ?$

25. $8^{\frac{2}{3}} = ?$
26. $32^{\frac{3}{5}} = ?$
27. $\sqrt{3} \cdot 3^{2.5} = ?$
28. אתם כמעט בסוף :-)
29. $2\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = ?$
30. $5\sqrt{3} - \sqrt{3} = ?$
31. $2\sqrt{200} = ?$
32. $\sqrt[3]{54} = ?$
33. $\sqrt[4]{144} \cdot 144^{\frac{1}{4}} = ?$
34. $\frac{\sqrt[3]{122}}{122^{\frac{1}{3}}} = ?$

פתרונות - חזקות ושורשים

1. $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$
2. $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
3. $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ מספר שלילי שמעלים בחזקה זוגית תמיד ייתן תוצאה חיובית.
4. $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$ מספר שלילי שמעלים בחזקה אי-זוגית נשאר שלילי.
5. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ מספר שמעלים אותו בחזקה שלילית הופך לשבר (כלומר להופכי של המספר) והחזקה השלילית הופכת לחזקה חיובית.
6. $(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ שימו לב שהיפוך הבסיס לא משנה את סימן המינוס שהתלווה אליו. התוצאה הינה חיובית מכיוון שהחזקה שהעלנו בה היא חזקה זוגית.
7. $12^2 = 144$ ביטוי נפוץ שחוזר על עצמו הרבה וכדאי לשנן אותו.
8. $0.75^1 = 0.75$ כל מספר (כולל שבר) בחזקת אחד שווה למספר עצמו.
9. $30^0 = 1$ כל מספר בחזקת אפס שווה ל-1.
10. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = \frac{2^3}{1^3} = \frac{8}{1} = 8$ בתרגיל בו מופיעה חזקה שלילית, נהפוך את הבסיס החזקה ונעלה באותה החזקה ללא סימן המינוס.

$$11. \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \quad \text{נפתור על פי הכלל של חזקה שלילית.}$$

$$12. 2^3 \cdot 2^2 = 2^{2+3} = 2^5 = 32 \quad \text{כפל של חזקות עם בסיסים זהים ומעריכים (חזקות) שונים מוביל לביטוי שהמעריך שלו שווה לסכום מעריכי החזקות.}$$

$$13. 3^4 \cdot 3^{-1} = 3^{4+(-1)} = 3^3 = 27 \quad \text{נפתור על פי הכלל של כפל חזקות עם מעריכים זהים.}$$

$$14. 2^1 \cdot 2^{-1} = 2^{1+(-1)} = 2^{1-1} = 2^0$$

כל מספר בחזקת 0 שווה 1 ולכן: $2^0 = 1$

$$15. \frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9 \quad \text{כשמחלקים חזקות עם בסיסים זהים ומעריכים שונים, אז התוצאה תהיה העלאת אותו הבסיס בחיסור המעריכים זה מזה.}$$

$$16. \frac{2^4}{2^{-1}} = 2^{4-(-1)} = 2^5 = 32 \quad \text{נפתור לפי הכלל של חילוק חזקות עם בסיסים זהים.}$$

$$17. 3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144 \quad \text{כשמכפילים חזקות בהן המעריך זהה והבסיס שונה, אז ניתן לאחד את מכפלת הבסיסים תחת אותה החזקה.}$$

$$18. 3^3 \cdot (-1)^3 = [3 \cdot (-1)]^3 = (-3)^3 = -27 \quad \text{נפתור לפי הכלל של כפל חזקות עם מעריכים זהים.}$$

$$19. \frac{32^2}{4^2} = \left(\frac{32}{4}\right)^2 = 8^2 = 64 \quad \text{כשמחלקים חזקות בהן המעריך זהה והבסיס שונה, אז ניתן לאחד את חלוקת הבסיסים תחת אותה החזקה.}$$

$$20. \frac{6^{-3}}{2^{-3}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{-3} = 3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \quad \text{נפתור לפי הכלל של חילוק חזקות עם מעריכים זהים.}$$

$$21. \sqrt{64} = 8 \quad \text{כשאנו רואים את סימן השורש בלי מעריך משמאלו הכוונה היא לשורש 2. במילים פשוטות יותר - איזה מספר אותו נעלה בריבוע יביא לתוצאה המצויה בסימן השורש.}$$

$$22. \sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{שורש שלישי - איזה מספר אותו נעלה בחזקה שלישית יביא לתוצאה הנמצאת מתחת לסימן השורש.}$$

$$23. \sqrt{72} = \sqrt{9 \cdot 8} = 3 \cdot \sqrt{8} = 3 \cdot \sqrt{4 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \quad \text{זוהי דוגמה לשאלה אשר הופיעה בבחינה.}$$

$\sqrt{72}$ אינו מספר שלם, אך ניתן לפשט אותו הלאה. כדי לפשט הלאה עלינו לפרק את המספר לגורמים אשר להם (או לחלקם לפחות) כן ניתן להוציא שורש שלם.

$$24. 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4 \quad \text{בתרגיל זה נראה כאילו מדובר במעריך שהוא שבר, אך נשים לב כי ניתן לצמצם את השבר המופיע במעריך לקבלת תרגיל חזקה פשוט הרבה יותר.}$$

25. $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ כשנתון לנו מעריך שהוא **שבר** נפעל לפי הכלל הבא: **המונה** קובע באיזה חזקה נעלה **והמכנה** - איזה שורש נבנה. שימו לב שסדר הכתיבה לא חשוב ולכן ניתן היה גם לפתור כך: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ כמובן שהתוצאה היא זהה.

26. $32^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$ נפתור לפי הכלל של **מעריך שהוא שבר**. שימו לב שעדיף במקרה זה קודם להוציא שורש ורק איזה חזקה בכדי לא לטפל במספרים גדולים מידי.

27. $\sqrt{3} \cdot 3^{2.5} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{2.5} = 3^{0.5+2.5} = 3^3 = 27$ כאשר בתרגיל ישנם גם שורשים וגם חזקות, נעדיף לעבוד רק אם אחת הצורות. זכרו שאפשר לעבור בקלות **משורש לחזקה** על ידי הפיכת המעריך.

28. **זוכרים שעוד רגע סיימתם** ☺.

29. $2\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$ שימו לב, זוהי פעולה שימושית מאוד בתרגילי פסיכומטרי. ניתן לחשוב כאילו אנו מחברים 2 יחידות (של $\sqrt{7}$) עם 4 יחידות (של $\sqrt{7}$) סה"כ נקבל 6 יחידות כאלו. הדבר זהה לפעולה הנעשית בתרגיל: $2X + 4X = 6X$.

30. $5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 1\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ בדיוק כמו בתרגיל הקודם, אנו מחסרים מ-5 יחידות (של $\sqrt{3}$) יחידה אחת ולכן נישאר עם 4 יחידות כאלו.

31. $2\sqrt{200} = 2 \cdot (\sqrt{100} \cdot \sqrt{2}) = 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ ננסה לפשט את השורש על כך שנפרק אותו לגורמים אשר לחלקם כן ניתן להוציא שורש 2.

32. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$ גם בתרגיל זה, ננסה לפרק את הבסיס 54 לגורמים שלהם כן ניתן להוציא שורש שלישי.

33. $\sqrt[4]{144} \cdot 144^{\frac{1}{4}} = 144^{\frac{1}{4}} \cdot 144^{\frac{1}{4}} = 144^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 144^{\frac{2}{4}} = 144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$ אנו שוב נתקלים בתרגיל בו מופיעים גם שורשים וגם חזקות, לכן נעדיף להעביר את **השורש לחזקה** על ידי חיפוף המעריך. כעת יש לנו כפל של חזקות עם **בסיסים זהים** ולכן נחבר את המעריכים. לבסוף נראה כי החזקה $\frac{1}{2}$ היא זהה בעצם לשורש שני ולכן נוכל לחזור ולחשב שורש שני לבסיס 144.

34. $\frac{\sqrt[3]{122}}{122^{\frac{1}{3}}} = \frac{122^{\frac{1}{3}}}{122^{\frac{1}{3}}} = 122^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 122^0 = 1$ נעבוד כמו בתרגיל הקודם, אך נשים לב שכל

מספר בחזקת אפס שווה לאחד. כמובן שעוד לפני כן ניתן היה לראות כי קיבלנו את אותו הביטוי במונה ובמכנה ועל כן התוצאה שווה ל-1.

משוואות

בחלק זה נעסוק במשוואות בנות נעלם אחד ובמערכות המכילות שתי משוואות ובהן שני נעלמים. לא נעסוק פה במשוואות סבוכות (דוגמת משוואות ריבועיות אשר נלמדות בתיכון) מאחר ואלו האחרונות אינן בנמצא בבחינה הפסיכומטרית. דמיינו לעצמכם שוק ובו חנות ירקות. משוואה דומה דמיון מפליא למאזניים של המוכר, כאשר אלו במצב מאוזן לחלוטין. אם המוכר יחליט לפתע להוסיף לצד אחד של המאזניים מלפפון הלא ברור לנו כי המאזניים לא ישמרו על מצבן ויטו לצד מסוים. מקרה שונה הוא בו המוכר מוסיף שני גזרים זהים כל אחד לצד שונה של המאזניים, כמובן שבמצב זה לא ישתנה דבר והמאזניים יישארו במצבן המאוזן. מדוגמה זו נכיר את הכלל הבא:

כלל הברזל

משוואה תישאר "נכונה" רק אם נוודא שכל פעולה מתמטית שאנו מבצעים עליה - מתבצעת על שני אגפי המשוואה.

הבה נביט במשוואה הפשוטה הבאה:

$$1 = 1$$

זוהי אחת הצורות הפשוטות ביותר של משוואה שניתן הציג, כמובן ששני האגפים מאוזנים בדיוק כמו מאזניו של המוכר בשוק. כעת נוסיף 2 רק לאחד מאגפי המשוואה:

$$1 = 1 + 2$$

ברור לנו כי כרגע הביטוי שקיבלנו אינו נכון מאחר ו-1 אינו שווה ל-3. הבה נוסיף את 2 גם לאגף השני:

$$1 + 2 = 1 + 2$$

$$3 = 3$$

כלומר:

ניתן לראות כי כעת זהו ביטוי נכון. כמובן, שיכולנו לבצע כל פעולה מתמטית שנבחר (כפל/ חילוק/ חיבור/ חיסור) כל עוד נבצע אותה על שני האגפים. אם הבנתם את העיקרון, הנכם מוכנים לפתור משוואות בנעלם אחד.

משוואות בנעלם אחד

הבה נביט בדוגמה למשוואה בנעלם אחד:

$$x - 7 = 3$$

בכדי לפתור משוואה בנעלם אחד, נרצה לחשב כמה שווה הנעלם - x . לשם כך נשאף **לבודד** אותו באחד מאגפי המשוואה. באגף השמאלי מפריע לנו ה- (-7) ועל כן, בכדי להיפטר ממנו נוסיף 7 לשני אגפי המשוואה:

$$x - 7 = 3 + 7$$

$$x - 7 + 7 = 3 + 7$$

$$x = 10$$

ראינו בדוגמה זו כי ביצענו את אותה הפעולה על שני האגפים, כדי שהמשוואה תישאר מאוזנת. שימו כי תמיד ניתן לבדוק עצמנו לאחר שהגענו לפתרון, אנו יכולים להציב את 10 במקום x במשוואה המקורית ולוודא שאכן אנו מקבלים ביטוי נכון.

כעת נביט על דוגמה נוספת:

$$32 = 17x - 2$$

גם כאן נשאף לבודד את ה- x והמקדם שלו באגף אחד ואת המספרים באגף שני. ולכן ראשית נוסיף את המספר 2 לשני אגפי המשוואה:

$$32 = 17x - 2 + 2$$

$$32 + 2 = 17x - 2 + 2$$

$$34 = 17x$$

לאחר שבודדנו את המשתנה שלנו עלינו למצוא כמה שווה x אחד. ועל כן נחלק את שני האגפים ב- 17 זאת כדי להיפטר מה-17 אשר כופל את ה- x :

$$34 = 17x / :17$$

$$\frac{34}{17} = \frac{17x}{17} \Rightarrow 2 = x$$

שימו לב, כי בכל פתרון משוואה המטרה היא זהה - אנו רוצים לבודד ולקבל את ערכו של נעלם בודד באחד מאגפי המשוואה.

תרגול

1. $x - 15 = 97$

2. $x + 7 = 3(1 + 7)$

3. $12 + 3y = 5y - 18$

4. $-3x + 53 = -7x + 9$

5. $\frac{7x - 23}{3} = 5x + 11$

6. $5 + 3x + 19\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$

7. $\frac{19}{38} = \frac{1}{x}$

8. $\frac{5x - 1}{12} = \frac{7x - 2}{18}$

9. $\frac{10}{x + 2} = \frac{8}{3}$

10. $\frac{17 - 14x}{12 - 13x} = 1.5$

$$11. \quad -\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3x}{6} - \frac{5}{2x}$$

$$12. \quad \frac{x}{2} + 11 = \frac{x(1-4) + 9}{4}$$

$$13. \quad 7x + 15 = \frac{3(4x - 30) + 15x - 15}{3}$$

$$14. \quad \frac{3x-6}{12} + \frac{2-x}{-4} = x$$

$$15. \quad \frac{1}{4} \left[\frac{x}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{4} - 3 \right) \right] = \frac{3}{2} - \frac{x}{12}$$

$$16. \quad \frac{1}{2} \left[\frac{x}{5} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3} + 3 \right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{x}{30}$$

$$17. \quad \frac{4x}{x+12} = \frac{12}{3} - \frac{30}{x}$$

פתרונות

1. $x = 112$

נרצה לבודד את הנעלם בצד אחד של המשוואה, לכן נוסיף 15

$$x - 15 = 97 / +15$$

לשני צידי המשוואה :

$$x - 15 + 15 = 97 + 15$$

$$x = 112$$

ברגע ש"בודדנו" את הנעלם, בעצם פתרנו את המשוואה :

2. $x = 17$

נשים לב כי במשוואה זו מופיעים סוגריים באחד האגפים :

$$x + 7 = 3(1 + 7)$$

$$x + 7 = 3 \cdot 8$$

EZ-TIP: על פי סדר פעולות חשבון, ראשית נפתור את הסוגריים בתרגיל :

$$x + 7 - 7 = 24 - 7$$

כעת נמשיך כרגיל במטרה לבודד את הנעלם, נחסר 7 משני האגפים :

$$x = 17$$

ולכן פתרון המשוואה יהיה :

3. $15 = y$

בשאלה זו הנעלם y מופיע בשני אגפי המשוואה.

$$12 + 3y = 5y - 18$$

$$12 + 3y = 5y - 18 / -3y$$

עלינו לבודדו בדיוק כמו בתרגילים הקודמים, ראשית נחסר $3y$:

$$12 + 3y - 3y = 5y - 3y - 18$$

$$12 = 2y - 18 / +18$$

כעת נמשיך בבידוד הנעלם, נוסיף 18 לשני האגפים :

$$12 + 18 = 2y - 18 + 18$$

$$30 = 2y / :2$$

שימו לב כי עלינו לפתור עבור y בודד, ולכן נחלק ב-2 :

$$\frac{30}{2} = \frac{2y}{2}$$

$$15 = y$$

לבסוף פתרון המשוואה יהיה :

שימו לב! בשלושת התרגילים הראשונים, הקפדנו לכתוב כל שלב בחישוב ללא קיצורי דרך.

מובן כי בבחינה הזמן קצר וניתן את שלבי החישוב לבצע "בראש". עדיין חשוב להקפיד לכתוב מהי פעולת החשבון המבוצעת על שני האגפים בכדי לא להתבלבל.

4. $x = -11$

$$-3x + 53 = -7x + 9 / +7x$$

נבודד את הנעלם, נוסיף $7x$ לשני האגפים :

$$4x + 53 = 9 / -53$$

כעת נמשיך במלאכת הבידוד על ידי חיסור 53 משני האגפים :

$$4x = -44 / :4$$

כל שנותר הוא לחלק ב-4 :

$$x = -11$$

ולכן פתרון המשוואה יהיה :

5. $-7 = x$

$$\frac{7x - 23}{3} = 5x + 11$$

בתרגיל זה, אחד מאגפי המשוואה הוא שבר שמכנהו 3 :

EZ-TIP: ניתן להיפטר ממכנה "לא רצוי" במשוואה על ידי הכפלת שני אגפי המשוואה בערכו של המכנה.

$$\frac{7x - 23}{3} = 5x + 11 / \cdot 3$$

כלומר, בכדי להיפטר מן המכנה נכפיל את שני האגפים ב-3 :

$$\frac{\cancel{3} \cdot (7x - 23)}{\cancel{3}} = 3 \cdot (5x + 11)$$

בצידה השמאלי של המשוואה – המכנה מצטמצם עם המונה :

בצד הימני עלינו "לפתוח סוגריים", כלומר לכפול כל אחד מן הגורמים שבתוך הסוגריים במספר הכופל- 3 :

$$7x - 23 = 3 \cdot 5x + 3 \cdot 11$$

קעת נמשיך כרגיל בבידוד הנעלם, נחסר $7x$ משני האגפים :

$$7x - 23 = 15x + 33 / -7x$$

נחסר 33 משני האגפים :

$$-23 = 8x + 33 / -33$$

$$-56 = 8x / :8$$

קעת נחלק ב- 8 :

$$-7 = x$$

ולכן פתרון המשוואה יהיה :

$$x = \frac{1}{3} \cdot 6$$

$$5 + 3x + 19 \frac{1}{2} = 25 \frac{1}{2}$$

ראשית נחבר את האיברים בצד הימני של המשוואה :

$$3x + 24 \frac{1}{2} = 25 \frac{1}{2} / -24 \frac{1}{2}$$

קעת נבודד את הנעלם, נחסר $24 \frac{1}{2}$ משני האגפים :

$$3x = 1 / :3$$

ונחלק ב-3 :

$$x = \frac{1}{3}$$

לכן פתרון המשוואה יהיה :

$$x = 2 \cdot 7$$

$$\frac{19}{38} = \frac{1}{x}$$

ראשית נשים לב כי ניתן לצמצם את השבר באגף השמאלי :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} / \cdot 2x$$

קעת עלינו לחלץ את x מן המכנה, נכפול במכנה המשותף $2x$:

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{x}} \Rightarrow x = 2$$

קעת נותר רק לצמצם ולפתור המשוואה :

EZ-TIP: כאשר במשוואה הנעלם מופיע במכנה – נוכל לכפול את שני אגפי המשוואה במכנה המשותף על מנת לחלצו.

שימו לב, פעמים רבות טכניקה זו מוכרת מבית הספר בשם **כפל באלכסון**. על פי שיטה זו אנו מכפילים באלכסון את מכני השברים במונה אשר באגף השני, כלומר :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow 1 \cdot x = 1 \cdot 2 \Rightarrow x = 2$$

כמובן שמבחינה מתמטית התוצאה זהה לחלוטין וניתן להשתמש בכפל באלכסון לשם הנוחות.

$$x = -1 \cdot 8$$

ראשית, עלינו להיפטר מהמכנים הלא רצויים, נכפיל במכנה המשותף (36) : $\frac{5x-1}{12} = \frac{7x-2}{18} / \cdot 36$

$$\frac{\cancel{36} \cdot (5x-1)}{\cancel{12}} = \frac{\cancel{36} \cdot (7x-2)}{\cancel{18}}$$

ונצמצם את המכנים :

$$3 \cdot (5x-1) = 2 \cdot (7x-2)$$

קעת נפתח סוגריים ונמשיך כרגיל :

$$15x - 3 = 14x - 4 / -14x$$

נבודד את x ונפתור :

$$x - 3 = -4 / +3$$

$$x = -1$$

ולכן פתרון המשוואה יהיה :

שימו לב, כמובן שניתן היה לפתור גם משוואה זו בעזרת **כפל באלכסון**.

$$x = 1 \frac{3}{4} \cdot 9$$

$$\frac{10}{x+2} = \frac{8}{3} \cdot 3(x+2) : \text{נחלץ אותו על ידי הכפלה במכנה המשותף} :$$

$$\frac{3(x+2) \cdot 10}{(x+2)} = \frac{3(x+2) \cdot 8}{3} \quad \text{שוב, נצמצם את המכנים} :$$

$$3 \cdot 10 = (x+2) \cdot 8 \quad \text{נפתח סוגריים ונפתור כרגיל} :$$

$$30 = 8x + 16 / -16$$

$$14 = 8x / :8$$

$$\frac{14}{8} = x \Rightarrow 1\frac{6}{8} = x \Rightarrow 1\frac{3}{4} = x \quad \text{ולכן פתרון המשוואה יהיה} :$$

$$x = \frac{2}{11} \quad .10$$

$$\frac{17-14x}{12-13x} = \frac{3}{2} : 1.5 = \frac{3}{2} \quad \text{לשם הנוחות נציג את האגף הימני כשבר פשוט במקום עשרוני} :$$

$$\frac{17-14x}{12-13x} = \frac{3}{2} / \cdot 2(12-13x) : \text{שוב עלינו לחלץ את } x \text{ מן המכנה ולכן נכפול במכנה המשותף} :$$

$$\frac{2(12-13x) \cdot (17-14x)}{(12-13x)} = \frac{2(12-13x) \cdot 3}{2} \quad \text{נצמצם את המכנים} :$$

$$2(17-14x) = (12-13x) \cdot 3 \quad \text{נפתח סוגריים ונפתור כרגיל} :$$

$$34 - 28x = 36 - 39x / +39x$$

$$34 + 11x = 36 / -34$$

$$11x = 2 / :11$$

$$x = \frac{2}{11} \quad \text{ולכן, פתרון המשוואה יהיה} :$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad .11$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3x}{6} - \frac{5}{2x} \quad \text{ראשית נפשט שברים שניתנים לצמצום} :$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{5}{2x} / -\frac{x}{2} \quad \text{ונצמצם ביטויים זהים משני אגפי המשוואה} :$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x} / \cdot 2x \quad \text{כעת, ניפטר מן ה- } x \text{ שבמכנה על ידי הכפלה במכנה המשותף} :$$

$$-\frac{2x}{x} + \frac{2x \cdot 3}{2} = \frac{2x}{2} - \frac{2x \cdot 5}{2x} \quad \text{נצמצם את המכנים} :$$

$$-2 + 3x = x - 5 / -x \quad \text{ונפתור כרגיל} :$$

$$-2 + 2x = -5 / +2$$

$$2x = -3 / :2$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{לכן, פתרון המשוואה יהיה} :$$

$$x = -7 \quad 12.$$

יש לשים לב כי אל השלם 11 ניתן להתייחס כשבר $\frac{11}{1}$ וכי גם הפעם אנו נכפיל במכנה, לא כדי לחלץ את הנעלם אלא אך ורק לשם הנוחות – תמיד עדיף לפתור משוואה ללא מכנים:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{11}{1} &= \frac{x(1-4)+9}{4} / \cdot 4 && \text{ראשית נחשב את הביטוי שבסוגריים ונכפיל במכנה המשותף:} \\ \frac{4 \cdot x}{2} + \frac{4 \cdot 11}{1} &= \frac{4 \cdot (-3x+9)}{4} / \cdot 4 && \text{ונצמצם את המכנים:} \\ 2x + 44 &= -3x + 9 / +3x && \text{כעת נמשיך ונפתור כרגיל:} \\ 5x + 44 &= 9 / -44 \\ 5x &= -35 / :5 && \text{ולכן פתרון המשוואה יהיה:} \\ x &= -7 \end{aligned}$$

$$x = 25 \quad 13.$$

$$\begin{aligned} 7x+15 &= \frac{3(4x-30)+15x-15}{3} / \cdot 3 && \text{ראשית נכפיל ב-3 על מנת להיפטר מן המכנה:} \\ 3 \cdot (7x+15) &= \frac{3 \cdot [3(4x-30)+15x-15]}{3} && \text{נצמצם את המכנה ונפתח סוגריים:} \\ 21x+45 &= 12x-90+15x-15 && \text{"נסדר" מעט את האגפים (נכנס איברים):} \\ 21x+45 &= 27x-105 / -21x \\ 45 &= 6x-105 / +105 \\ 150 &= 6x / :6 \\ 25 &= x && \text{ולכן פתרון המשוואה יהיה:} \end{aligned}$$

$$x = -2 \quad 14.$$

$$\begin{aligned} \frac{3x-6}{12} + \frac{2-x}{-4} &= x / \cdot 12 && \text{גם בתרגיל זה ראשית נכפיל במכנה המשותף (12):} \\ \frac{\cancel{12} \cdot (3x-6)}{\cancel{12}} + \frac{\cancel{12} \cdot (2-x)}{-\cancel{4}} &= 12 \cdot x && \text{כעת נצמצם את המכנים ונפתח סוגריים:} \\ 3x-6-3 \cdot (2-x) &= 12 \cdot x \\ 3x-6-6+3x &= 12 \cdot x && \text{נסדר מעט את אגפי המשוואה:} \\ 6x-12 &= 12 \cdot x / -6x && \text{ונפתור כרגיל:} \\ -12 &= 6x / :6 && \text{לכן פתרון המשוואה יהיה:} \\ -2 &= x \end{aligned}$$

שימו לב: שני התרגילים הבאים (15,16) הינם תרגילים אלגבריים ארוכים מכדי להופיע בבחינה, אבל הם מהווים אימון מצוין לכל אותן טכניקות פתרון משוואה בנעלם אחד בהן אתם נדרשים לשלוט.

$$x = 12 \quad 15.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left[\frac{x}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{4} - 3 \right) \right] &= \frac{3}{2} - \frac{x}{12} && \text{ראשית כל, נפתח סוגריים באגף השמאלי (תחילה הפנימיים):} \\ \frac{1}{4} \left[\frac{x}{6} + \frac{x}{12} - \frac{3}{3} \right] &= \frac{3}{2} - \frac{x}{12} && \text{כעת נפתח גם את הסוגריים החיצוניים:} \end{aligned}$$

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{48} - \frac{3}{12} = \frac{3}{2} - \frac{x}{12} \quad / \cdot 48$$

$$\frac{2x}{24} + \frac{2x}{48} - \frac{48 \cdot 3}{48 \cdot 12} = \frac{48 \cdot 3}{48 \cdot 2} - \frac{48 \cdot x}{48 \cdot 12}$$

$$2x + x - 4 \cdot 3 = 24 \cdot 3 - 4 \cdot x$$

$$3x - 12 = 72 - 4x \quad / +4x$$

$$7x - 12 = 72 \quad / +12$$

$$7x = 84 \quad / :7$$

$$x = 12$$

בשלב זה נכפול במכנה המשותף (48):

נצמצם את המכנים ונמשיך לפתור כרגיל:

ולכן, פתרון המשוואה יהיה:

$$x = 25 \quad 16.$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x}{5} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3} + 3 \right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{x}{30}$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x}{5} - \frac{x}{6} - \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{x}{30}$$

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{x}{30} \quad / \cdot 60$$

$$\frac{60x}{10} - \frac{60x}{12} - \frac{60 \cdot 3}{4} = \frac{60}{2} - \frac{60x}{30} \quad / \cdot 60$$

$$6x - 5x - 15 \cdot 3 = 30 - 2x$$

$$x - 45 = 30 - 2x \quad / +2x$$

$$3x - 45 = 30 \quad / +45$$

$$3x = 75 \quad / :3$$

$$x = 25$$

נפתור באופן דומה לתרגיל הקודם – נפתח סוגריים פנימיים:

ולאחר מכן נפתח את הסוגריים החיצוניים:

כעת נכפיל במכנה המשותף (60):

נצמצם את המכנים:

נסדר מעט את המשוואה ונפתור כרגיל:

ולכן פתרון המשוואה יהיה:

$$x = 20 \quad 17.$$

$$\frac{4x}{x+12} = \frac{12}{3} - \frac{30}{x} \quad / \cdot 3x(x+12)$$

$$\frac{3x(x+12) \cdot 4x}{x+12} = \frac{3x(x+12) \cdot 12}{3} - \frac{3x(x+12) \cdot 30}{x}$$

$$3x \cdot 4x = 12x(x+12) - 3 \cdot 30(x+12)$$

$$12x^2 = 12x^2 + 144x - 90x - 90 \cdot 12$$

$$0 = 144x - 90x - 90 \cdot 12$$

$$0 = 54x - 90 \cdot 12 \quad / +90 \cdot 12$$

$$90 \cdot 12 = 54x$$

$$90 \cdot 12 = 54x \quad / :9$$

$$10 \cdot 12 = 6x \quad / :6$$

$$10 \cdot 2 = x$$

$$20 = x$$

על מנת לחלץ את x מן המכנה – נכפיל במכנה המשותף:

כעת נצמצם את המכנים:

נפתח סוגריים ונפתור:

נצמצם גורמים זהים משני האגפים:

שימו לב, בחרנו לעת עתה לא לחשב כמה הם $(-90 \cdot 12)$, בהנחה שבהמשך ביטוי זה יצטמצם ויהיה נוח יותר לחישוב.

נמשיך ונסדר את אגפי המשוואה ונפתור כרגיל:

אם אנו לא בטוחים האם הביטוי מתחלק ב-54, ניתן לצמצם בשלבים:

ולכן פתרון המשוואה יהיה:

משוואות בשני נעלמים

לעתים נתקל בצמד משוואות שבהן שני נעלמים. במקרה שכזה נשאף לפשט את התרגיל ולהגיע למצב בו נישאר עם משוואה אחת בלבד. אחרי שהגענו למצב זה, לא נשאר לנו אלא לפתור בדרך שהכרנו משוואה בנעלם אחד.

שיטה 1 – שיטת ההצבה

נבטא את ערכו של אחד הנעלמים ונציבו במשוואה השנייה. לאחר שפתרנו עבור אחד הנעלמים נציב את הערך שמצאנו באחת המשוואות ונקבל את ערכו של הנעלם השני.

דוגמה:

$$\begin{cases} -2y + 6 + x = 11 \\ 3y - x = 12 \end{cases}$$

במטרה להיפטר מאחת המשוואות נוכל לבדוד מהמשוואה הראשונה את הנעלם x :

$$\begin{cases} -2y + 6 + x = 11 \Rightarrow x = 5 + 2y \\ 3y - x = 12 \end{cases}$$

כעת, נציב את ערכו של x במשוואה השנייה (התחתונה) ונפתור כמשוואה בנעלם אחד:

$$3y - (5 + 2y) = 12$$

$$3y - 5 - 2y = 12$$

$$y - 5 = 12 / +5$$

$$y = 17$$

כפי ששמתם לב יש להציב את ערכו של x בתוך סוגריים על מנת שלא נתבלבל לגבי הסימנים.

השלב האחרון הוא כמובן להציב את ערך ה- y שקיבלנו ולחשב את ערכו של x , נציב במשוואה התחתונה:

$$3 \cdot 17 - x = 12$$

$$51 - x = 12 / -12$$

$$39 - x = 0 / +x$$

$$39 = x$$

כלומר הפתרון של מערכת המשוואות הוא:

$$\begin{cases} x = 39 \\ y = 17 \end{cases}$$

שיטה 2 – חבר, חסר, העיקר מהנעלם השני להיפטר!
ניתן לחבר ולחסר משוואות בדרך שתעזור לנו להיפטר מאחד הנעלמים.

דוגמה:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$$

ניתן לראות בנקל כי האיבר $3x$ מופיע גם במשוואה הראשונה וגם במשוואה השנייה. במצב שכזה קל מאוד להיפטר מאותו האיבר על ידי פעולת חיסור בין שתי המשוואות כפי שהן: כלומר נחסר אנף שמאל מאנף שמאל ואנף ימין מאנף ימין וכך ניפטר מה- x במשוואות:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ - \\ 3x + 3y = 2 \\ \hline 0 - 5y = 5 \end{cases}$$

כעת שוב הגענו למצב בו ישנו נעלם אחד בלבד, נחשב את ערך ה- y :

$$-5y = 5 / : -5$$

$$y = -1$$

ומכאן ההמשך זהה לחלוטין, נציב את ערך ה- y שמצאנו באחת המשוואות ונחשב את ערכו של x (הצבה במשוואה העליונה):

$$3x - 2(-1) = 7$$

$$3x + 2 = 7 / -2$$

$$3x = 5 / : 3$$

$$x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = 1\frac{2}{3}$$

ועל כן הפתרון של מערכת המשוואות הנ"ל הוא:

$$\begin{cases} x = 1\frac{2}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

EZ-TIP: בשיטה זו, המטרה היא לחסר שני גורמים להם אותו המקדם (לדוגמה $2x$ בשתי המשוואות). במקרה והמקדמים אינם זהים, ניתן כמובן להרחיב/לצמצם את שני אגפי המשוואה בכל מספר שנבחר על מנת שהמקדמים יהיו זהים.

לסיכום:

ראינו שתי דרכי פתרון לפישוט מערכת משוואות בשני נעלמים:

1. בידוד משתנה והצבתו במשוואה השנייה.

2. חיבור/חיסור המשוואות.

למעשה אין עדיפות לאחת מהשיטות, ונבחר בשיטה מסוימת לפי הנוחות ובהתאם לתרגיל.

למעשה המטרה של שתי השיטות היא אחת - **חזרה למקורות**, כלומר להגיע למצב שבו יש

לנו משוואה אחת בנעלם אחד!

תרגול משוואות בשני נעלמים

חשבו את ערכי x ו- y בכל אחד מהתרגילים:

$$1. \begin{cases} 2y = 10x - 16 \\ 14 = x + 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 13 - y = 12x \\ 0 = 19 - y - 10x \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -4x + 6y = 26 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -x + 3y = 11 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 9x - 1 = 5y \\ -17x + 20y = 15 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x - 7y = 8 \\ -5x + 6y = -21 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} -7 = -2y + 5x \\ 9x + 12 = 3y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 1\frac{1}{4}x + y = -1 \\ 2x - 1\frac{1}{2}y = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{3x}{4} + y = \frac{43}{5} \\ y = \frac{7x}{5} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y - 6\frac{2}{3}x = -6 \\ -0.3y - 2x = -3 \end{cases}$$

תרגיל בונוס לשואפים ל- 800

$$11. \begin{cases} \frac{1}{\frac{e}{2} - z} + \frac{4}{\frac{e}{2} - z} = 1 \\ 0.3e + 0.1z = 1.6 \end{cases}$$

פתרונות

1. $(32 = y, 8 = x)$

נבודד את x מהמשוואה התחתונה ונציב אותו בעליונה:

$$\begin{cases} 2y = 10x - 16 \\ 14 = x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 10x - 16 \\ 8 = x \end{cases} \Rightarrow 2y = 10 \cdot 8 - 16$$

כעת נחשב כמה שווה y :

$$2y = 80 - 16$$

$$2y = 64 : 2$$

$$y = 32$$

$$(32 = y, 8 = x)$$

ולכן פתרון התרגיל הינו:

2. $(x = -3, y = 49)$

נבודד את y מהמשוואה העליונה ונציב בתחתונה:

$$\begin{cases} 13 - y = 12x \\ 0 = 19 - y - 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (13 - 12x) \\ 0 = 19 - y - 10x \end{cases} \Rightarrow 0 = 19 - (13 - 12x) - 10x$$

כעת נפתור ונחשב את x :

$$0 = 19 - 13 + 12x - 10x$$

$$0 = 6 + 2x$$

$$-6 = 2x : 2$$

$$x = -3 \quad y = 13 - 12(-3) \Rightarrow y = 49$$

נציב את ערכו של x במשוואה העליונה ונחשב את y :

$$(x = -3, y = 49)$$

ולכן פתרון התרגיל הינו:

3. $(x = -5, y = 1)$

נרחיב את המשוואה התחתונה פי 3 על מנת להשוות את מקדמי ה- y :

$$\begin{cases} -4x + 6y = 26 \\ 9x + 6y = -39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 6y = 26 \\ 3x + 2y = -13/3 \end{cases}$$

כעת נחסר את המשוואות ונפתור עבור x :

$$-4x + 6y = 26$$

$$-9x + 6y = -39$$

$$-13x + 0 = 65$$

$$-13x = 65 / : -13 \Rightarrow x = -5$$

לאחר שחישבנו את x נציב את ערכו באחת המשוואות (העליונה במקרה זה):

$$-4 \cdot (-5) + 6y = 26$$

$$20 + 6y = 26 / -20$$

$$6y = 6 / : 6 \Rightarrow y = 1$$

$$(x = -5, y = 1)$$

ולכן פתרון התרגיל הינו :

$$4. (x = -5, y = 2)$$

נצמצם את המשוואה התחתונה (נחלק ב-2) על מנת להשוות את מקדמי ה- x ונחבר :

$$\begin{cases} -x + 3y = 11 \\ 2x + 4y = -2 / : 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -x + 3y = 11 \\ + \quad x + 2y = -1 \\ \hline 5y = 10 \\ y = 2 \end{array}$$

ולכן ערכו של y יהיה :

$$-x + 3 \cdot 2 = 11$$

נציב באחת המשוואות (העליונה במקרה זה) ונחשב את ערכו של ה- x :

$$-x + 6 = 11 / -6$$

$$-x = 5 \Rightarrow x = -5$$

$$(x = -5, y = 2)$$

ולכן פתרון התרגיל יהיה :

$$5. (x = 1, y = 1\frac{3}{5})$$

ראשית נסדר את המשוואות כך שכל הגורמים יהיה זה מעל זה בהתאמה :

$$\begin{cases} 9x - 5y = 1 \\ -17x + 20y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 1 = 5y \\ -17x + 20y = 15 \end{cases}$$

כעת נרחיב את המשוואה העליונה פי 4 על מנת להשוות את מקדמי ה- y ונחבר את המשוואות :

$$\begin{cases} 9x - 5y = 1 / \cdot 4 \\ -17x + 20y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 36x - 20y = 4 \\ + \quad -17x + 20y = 15 \\ \hline 19x = 19 \\ x = 1 \end{array}$$

לכן, ערכו של x יהיה :

$$9 \cdot 1 - 5y = 1 / -9$$

נציב באחת מן המשוואות (הראשונה במקרה זה) על מנת למצוא את y :

$$-5y = -8 / : -5$$

$$y = \frac{8}{5} \Rightarrow y = 1\frac{3}{5}$$

$$(x = 1, y = 1\frac{3}{5})$$

פתרון התרגיל יהיה אם כן :

6. $(x = 9, y = 4)$

בתרגיל זה, עלינו להרכיב את שתי המשוואות על מנת להשוות את מקדמי ה- x :

$$\begin{cases} 20x - 35y = 40 \\ -20x + 24y = -84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 7y = 8 / \cdot 5 \\ -5x + 6y = -21 / \cdot 4 \end{cases}$$

כעת נחבר את המשוואות על מנת להיפטר מה- x :

$$\begin{array}{r} 20x - 35y = 40 \\ + \\ -20x + 24y = -84 \\ \hline -11y = -44 \\ y = 4 \end{array}$$

ולכן, ערכו של y יהיה:

$$4x - 7 \cdot 4 = 8$$

נציב את ערכו של y באחת המשוואות (העליונה) ונמצא את ערכו של x :

$$4x - 28 = 8 / +28$$

$$4x = 36 / :4$$

$$x = 9$$

$$(x = 9, y = 4)$$

פתרון התרגיל יהיה אם כן:

7. $(x = -1, y = 1)$

ראשית נסדר את המשוואות, כך שכל הגורמים יהיו זה מעל זה בהתאמה:

$$\begin{cases} -7 = -2y + 5x \\ 12 = 3y - 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 = -2y + 5x \\ 9x + 12 = 3y \end{cases}$$

כעת נרכיב את המשוואות על מנת להשוות את מקדם ה- y ונחבר ביניהן:

$$\begin{array}{r} -7 = -2y + 5x / \cdot 3 \\ 12 = 3y - 9x / \cdot 2 \\ \hline -21 = -6y + 15x \\ + \\ 24 = 6y - 18x \\ \hline 3 = -3x \\ x = -1 \end{array}$$

ולכן ערכו של x יהיה:

$$9 \cdot (-1) + 12 = 3y$$

נציב ערך זה באחת המשוואות בכדי לחשב את ערכו של y :

$$3 = 3y / :3$$

$$1 = y$$

$$(x = -1, y = 1)$$

פתרון התרגיל יהיה אם כן:

8. $(x = 0, y = -1)$

בתרגיל זה, ראשית עלינו לטפל בשברים המעורבים המופיעים בו ולכן נהפוך את השברים לשברים טהורים:

$$\begin{cases} \frac{5}{4}x + y = -1 \\ 2x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\frac{1}{4}x + y = -1 \\ 2x - 1\frac{1}{2}y = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

נרצה להיפטר מן המכנים ולפשט את הביטוי. לכן נכפיל את כל המשוואה בערכו של המכנה:

$$\begin{cases} 5x + 4y = -4 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x + y = -1 / \cdot 4 \\ 2x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} / \cdot 2 \end{cases}$$

מכאן נמשיך כרגיל, נרחיב את המשוואות על מנת להשוות את מקדם ה- y ונחבר :

$$\begin{cases} 5x + 4y = -4 / \cdot 3 \\ 4x - 3y = 3 / \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -12 \\ 16x - 12y = 12 \end{cases}$$

$$\underline{31x = 0}$$

$$x = 0$$

ולכן, ערכו של x יהיה :

$$5 \cdot 0 + 4y = -4$$

כעת נציב באחת המשוואות ונחשב את ערכו של y :

$$y = -1$$

$$(x = 0, y = -1)$$

כלומר, פתרון התרגיל יהיה :

$$9. (x = 20, y = 28)$$

בתרגיל זה, נתון לנו ערכו של y ולכן נוכל להציבו ישר במשוואה העליונה :

$$\frac{3x}{4} + \frac{7x}{5} = \frac{43}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} + y = \frac{43}{5} \\ y = \frac{7x}{5} \end{cases}$$

$$\frac{3x}{4} + \frac{7x}{5} = \frac{43}{5} / \cdot 5 \Rightarrow \frac{3x}{4} + \frac{7x}{5} = 43$$

נוכל להיפטר מן המכנה על ידי הכפלה ב- 5 :

$$\frac{3x}{4} + \frac{7x}{5} = 43 / \cdot 20$$

ומן המכנים הנותרים ניפטר על ידי הכפלה במכנה המשותף- 20 :

$$\frac{20 \cdot 3x}{4} + \frac{20 \cdot 7x}{5} = 20 \cdot 43 \Rightarrow 15x + 28x = 20 \cdot 43$$

$$43x = 20 \cdot 43 / : 43$$

$$x = 20$$

לכן ערכו של x יהיה :

$$y = \frac{7 \cdot 20}{5} \Rightarrow y = 7 \cdot 4$$

נציב את ערכו של x ונחשב את ערכו של y :

$$y = 28$$

$$(x = 20, y = 28)$$

ולכן פתרון התרגיל יהיה :

EZ-TIP: נוכל תמיד להיפטר ממכנה "לא רצוי" על ידי הכפלת שני אגפי המשוואה באותו המכנה.

$$10. (x = 1\frac{1}{5}, y = 2)$$

הבעיה הראשונה עימה נתמודד היא השברים בתרגיל. ראשית נהפוך שברים מעורבים לשברים טהורים, ושברים עשרוניים לשברים פשוטים :

$$\begin{cases} y - \frac{20}{3}x = -6 \\ -\frac{3}{10}y - 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 6\frac{2}{3}x = -6 \\ -0.3y - 2x = -3 \end{cases}$$

כעת, על מנת להיפטר מן המכנים נכפיל את המשוואה העליונה פי 3 ואת התחתונה פי 10 :

$$\begin{cases} 3y - 20x = -18 \\ -3y - 20x = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{20}{3}x = -6/3 \\ -\frac{3}{10}y - 2x = -3/10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3y - 20x = -18 \\ -3y - 20x = -30 \\ \hline 6y = 12 \\ y = 2 \end{array}$$

מכיוון שמקדמי ה- y זהים, נוכל באופן מיידי לחסר בין המשוואות:

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 2 - 20x = -18 \\ -20x = -24/ : -20 \\ x = \frac{-24}{-20} \Rightarrow x = 1\frac{4}{20} \\ x = 1\frac{1}{5} \end{array}$$

ולכן ערכו של ה- y יהיה:

נציב באחת המשוואות ונחשב את ערכו של x :

$$(x = 1\frac{1}{5}, y = 2)$$

ולכן פתרון התרגיל יהיה:

EZ-TIP: במשוואות לעיתים קל לעבוד עם שברים פשוטים מאשר עם שברים עשרוניים.
לכן נמיר משבר עשרוני לשבר פשוט.

11. $(e = 6, z = -2)$

שימו לב, אומנם התרגיל נראה מאיים אך נשתמש באותם העקרונות שהכרנו עד כה על מנת להגיע לפתרון.
ראשית נשים לה כי במשוואה העליונה ישנו מכנה משותף ולכן ניתן לחבר את המונים:

$$\begin{cases} \frac{5}{\frac{e}{2} - z} = 1 \\ 0.3e + 0.1z = 1.6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\frac{e}{2} - z} + \frac{4}{\frac{e}{2} - z} = 1 \\ 0.3e + 0.1z = 1.6 \end{cases}$$

כעת נתמודד עם השברים, נהפוך את השברים במשוואה התחתונה משברים עשרוניים לשברים פשוטים ונכפיל במכנה המשותף בכל אחת מהמשוואות:

$$\begin{cases} 5 = \frac{e}{2} - z \\ 3e + z = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{\frac{e}{2} - z} = 1/ \cdot \left(\frac{e}{2} - z \right) \\ \frac{3}{10}e + \frac{1}{10}z = \frac{16}{10} / \cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \frac{e}{2} - z = 5 \\ 3e + z = 16 \end{array}$$

כעת נסדר את המשוואות ונחבר ביניהן על מנת להיפטר מן ה- z :

$$3e + z = 16$$

$$3\frac{1}{2}e = 21$$

$$\frac{7}{2}e = 21/ \cdot 2 \Rightarrow 7e = 42/ : 7$$

$$e = 6$$

$$3 \cdot 6 + z = 16 \Rightarrow z = -2$$

ולכן ערכו של e יהיה:

נציב ערך זה באחת מן המשוואות על מנת לחשב את ערכו של z :

ולכן פתרון התרגיל יהיה:

$$(e = 6, z = -2)$$